

DOI: 10.16285/j.rsm.2016.06.034

土的三维破坏准则在颗粒流模型中的应用

费建波, 介玉新, 张丙印, 傅旭东

(清华大学 水沙科学与水利水电工程国家重点试验室 三江源协同创新中心, 北京 100084)

摘 要: Savage-Hutter(S-H)颗粒流模型用一个只与材料参数相关的土压力系数来描述颗粒流内部的应力状态,不能很好地反映颗粒体在运动时的本构关系。通过引入颗粒体应力与速度梯度之间的关系,得到了一个能够反映颗粒流本构模型的崩塌动力学模型。另外,为解除 S-H 模型中对横向应力大小的假定,通过引入 Von Mises、Drucker-Prager、Mohr-Coulomb 和 Matsuoka-Nakai 等土的三维破坏准则,得到了广义摩擦系数的 4 种表达形式。该模型的主要优势是通过引入颗粒流的本构关系,能较好地体现颗粒流体在运动中的内在机制,并且材料强度参数简单易知。分析了由 Drucker-Prager 准则和 Mohr-Coulomb 准则所得到的材料强度参数,并探讨了广义摩擦系数与应力洛德角等物理量之间的关系。用所建议的模型来模拟颗粒流的运动过程,并将数值计算与试验结果进行对比,发现两者能够较好吻合。

关 键 词: 碎屑流; S-H 模型; 三维破坏准则; 颗粒流

中图分类号: TU 441

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598(2016)06-1809-09

Application of a three-dimensional yield criterion to granular flow modeling

FEI Jian-bo, JIE Yu-xin, ZHANG Bing-yin, FU Xu-dong

(Sanjiangyuan Collaborative Innovation Center, State Key Laboratory of Hydrosience and Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: In the Savage-Hutter (S-H) granular flow model, the earth pressure coefficient that is only related to the material property is chosen to describe the internal stresses of the granular flow. However, the constitutive relation of the granular flow is not given in this model. In this paper, an avalanche dynamic model, which can well reveal the constitutive behavior of the granular flow, is developed by introducing the relationship between the stress and the velocity gradient. In order to relax the assumption for lateral stress, the Von Mises criterion, Drucker-Prager criterion, Mohr-Coulomb criterion and Matsuoka-Nakai criterion are combined to yield four expressions of the generalized friction coefficient for describing the moving properties of the granular material. As one of the advantages of the proposed model, the internal mechanism of granular flow is clearly revealed by introducing a simplified constitutive relationship, and the strength parameters used in the proposed model are readily available. The strength parameters derived by Drucker-Prager criterion and Mohr-Coulomb criterion are also analyzed, and the relationship between the generalized friction coefficient and the Lode angle is deduced. It is shown that the numerical simulations of the proposed model agree well with the experimental results.

Keywords: debris flow; Savage-Hutter (S-H) model; three-dimensional yield criterion; granular flow

1 引 言

滑坡、碎屑流、泥石流等是山区易发的自然灾害,这些灾害给人们的生命和生活带来了很大的威胁。对于具有滑动面的整体滑坡,其运动距离较短,且滑坡体内部的变形较小,这种类型的滑坡通常可

以采用固体力学的方法计算其变形。对于另一类高速远程滑坡(碎屑流),土体在开始阶段会迅速破坏失稳,随后会以流体的状态滑动较长的距离。而对于碎屑流这类问题的模拟,通常可以采用颗粒流的方法进行研究。

用数值计算的手段来描述颗粒流现象的方法主

收稿日期: 2015-04-24

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(973 计划)项目(No.2013CB036402); 国家自然科学基金(No.51279085)。

This work was supported by the National Basic Research Program of China (973 Program 2013CB036402) and the Natural Science Foundation of China (51279085).

第一作者简介: 费建波,男,1988 年生,博士研究生,主要从事滑坡和颗粒流的数值计算等方面研究。E-mail: feijb11@mails.tsinghua.edu.cn

通讯作者: 介玉新,男,1970 年生,博士,教授,博导,主要从事土工数值分析、土工合成材料等方面研究。E-mail: jieyx@tsinghua.edu.cn

要分为两大类：一类方法是将颗粒体看成很多颗粒的集合体，通过分析单个颗粒的受力状况，从而研究颗粒体整体的性质，这种思路的代表方法为离散元法（discrete element method，简称 DEM）^[1-4]；另一类方法是将颗粒体看成流动连续体，并通过引入颗粒体内部的本构关系，用流体的偏微分方程组来描述颗粒的运动，这类方法可以称为连续理论。在连续理论里，颗粒体的运动方程是通过对 Navier-Stokes 方程在深度方向上从自由表面到底面积分得到的。而连续理论中不同模型的区别主要在于本构模型和底部摩擦力表达形式的不同。

从 20 世纪 80 年代开始，出现了很多连续体模型。其中，溃坝和洪水演进模型，即水动力学模型，最早被用来模拟滑坡和泥石流等的连续模型，这些模型有 Lang^[5]、Jeyapalan^[6]、Takahashi^[7]、O'Brien^[8]、Voight^[9]、Shieh^[10]等的研究。水动力模型采用类似浅水方程的表达形式来模拟高速远程滑坡和泥石流等问题，这实际上就是假设滑坡体的内部应力是服从静水压力状态的。此外，水动力模型中底部摩擦力的表达式是通过试验参数率定得到的。

S-H 模型改进了水动力学模型内部应力过于简化的问题，是一种更符合物理实质的模型。Savage 和 Hutter^[11]认为，颗粒体在运动过程中是符合摩尔-库仑破坏准则的，并通过引入一定的假设（①颗粒体不可压缩；②颗粒流动深度较浅；③速度沿深度均匀分布；④土条底部的摩擦力为库仑摩擦力），得到描述颗粒流的质量和动量守恒方程。在 S-H 模型中，通过假定滑动土体满足土的摩尔-库仑准则，并借用土力学中土压力系数的定义，得到了主动和被动土压力系数的表达式，即 $K_{act/pass} = 2 \sec^2 \varphi (1 \mp (1 - \cos^2 \varphi / \cos^2 \delta)^{1/2}) - 1$ （其中， δ 为床面摩擦角， φ 为滑坡体内摩擦角），这样便可以通过土压力系数得到土条间的作用力。但 S-H 模型假设水平方向的应力只与竖直方向应力和土压力系数有关，这不能体现 da Cruz 等^[12]颗粒试验中所揭示的一些性质，如应力与应变率和速度的相关性。

此外，在 S-H 模型建立的基础上，有些学者又进行了一定的改进。比如，为了描述颗粒体在三维地形上的流动，Hutter 等^[13]假设横向水平应力（平行于滑面并与主运动方向垂直的方向）的大小与主应力大小相等，建立了颗粒体的三维运动模型。Gray 等^[14]进一步改进了颗粒流的三维运动模型，使该模型适用于模拟颗粒物质在不规则三维滑面上的运动。另外，Bouchut 等^[15]解除了 S-H 模型中要求滑

动地形平缓的限制，并且考虑了颗粒体在运动过程中的侵蚀作用。Fernández 等^[16]将模型应用到模拟海底滑坡和海啸中去。

但现有的颗粒流模型还存在着一定的不足。用 S-H 模型对内力进行分析的主要优点是内力表达简单，但该方法是通过假设建立起来的，其内力的表达形式缺乏具体的物理依据。另外，在 Savage 和 Hutter^[11]提出的三维模型中，认为横向水平应力（平行于滑面并与主运动方向垂直的方向）的大小与主应力大小相等，该假设的前提是这个方向的速度和速度的变化率相对于主运动方向的速度和速度变化率都很小，这就限制了模型模拟复杂地形情况的颗粒体运动。针对这一问题，Pudasaini 和 Hutter^[17]虽然在 S-H 模型基础上提出了一种模拟弯曲沟槽的颗粒流运动模型，但在该模型中横向应力的假设依然存在，并且该计算方法比较繁琐，实际操作较困难。

与此同时，在颗粒物质作用机制的基础研究领域也有很多学者做出了贡献。Jop 等^[18]基于颗粒物质的剪切试验，提出了一种颗粒流的本构关系模型，认为颗粒物质在流动中的应力 σ_{ij} 应满足如下关系：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= P\delta_{ij} - \tau_{ij} \\ \tau_{ij} &= \eta(|\dot{\gamma}|, P)\dot{\gamma}_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中： $\eta(|\dot{\gamma}|, P) = \mu(I)P/|\dot{\gamma}|$ ， $I = |\dot{\gamma}|d/(P/\rho_s)^{0.5}$ ， $\mu(I)$ 为 friction coefficient，我们在本文中将其称作“广义摩擦系数”， d 为颗粒直径， ρ_s 为颗粒体的密度； δ_{ij} 为狄拉克 δ 函数； P 为颗粒所受的压力； $\dot{\gamma}_{ij} = \partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i$ 为应变速率矢量，其绝对值定义为 $|\dot{\gamma}| = (0.5\dot{\gamma}_{ij}\dot{\gamma}_{ij})^{0.5}$ 。

广义摩擦系数 $\mu(I)$ 可以通过颗粒体的平板快速剪切试验得到经验公式，即

$$\mu(I) = \mu_s + (\mu_2 - \mu_s)/(I_0/I + 1) \quad (2)$$

式中： μ_s 和 μ_2 分别为摩擦系数的临界值（critical value）和界限值（limiting value）； I 为无量纲化的惯性数； I_0 为试验参数。

尽管 Jop 等^[18]建立的模型能很好反映颗粒流的本构关系，但其中一些参数的测定过于复杂，难以直接运用到自然碎屑流的数值模拟中。此外，该模型中的摩擦系数的表达式是基于均一粒径颗粒物质试验的基础上得到，其是否适用于复杂组成颗粒物质不得而知。

本文将土的三维破坏准则引入到颗粒流本构模型中，这样既能将难以测定的物理参数转化为简单易知的材料强度参数，又能把模型的适用范围从只

能模拟由单一粒径颗粒体组成的颗粒体的运动, 扩展到模拟有着更为复杂组成的碎屑流中, 进而可以建立一个便于数值实现的简化模型。

2 基于本构方程的颗粒运动方程

本节主要介绍运用颗粒本构关系建立颗粒流控制方程的过程。当土坡失稳后会在重力作用下沿着坡面向下滑动, 取紧靠坡面的单元为研究对象, 如图1所示。假设单元体竖向的速度梯度很小, 进而忽略较小的应力, 可以研究单元余下的应力, 如图2所示。图中, τ_{xz} 和 τ_{yz} 分别为单元底部摩擦应力在两个方向的分量。

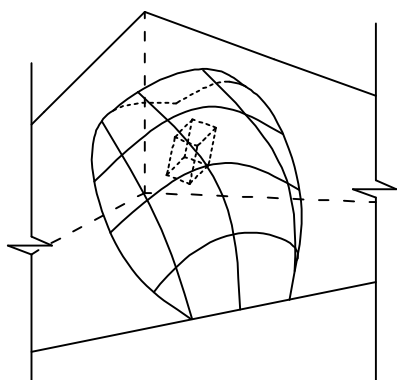


图1 土坡失稳后滑动及研究单元示意图
Fig.1 Schematic of the post-failure slope and the studied element

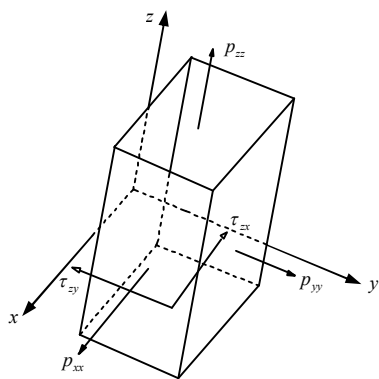


图2 基本单元的应力分析图
Fig.2 Stress analysis for the elementary element

从 Jop 等^[18]建立的本构关系可知, 单元体沿着 x 轴和 y 轴方向的正应力与这个方向的应变速率、法向应力和应变速率的第二不变量有关。参考 Jop 等的工作, 可以给出单元应力的表达式为

$$\left. \begin{aligned} p_{zz} &= P \\ p_{xx} &= P - \mu \frac{P}{|\dot{\gamma}|} \dot{\gamma}_{xx} \\ p_{yy} &= P - \mu \frac{P}{|\dot{\gamma}|} \dot{\gamma}_{yy} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中: $P = \rho g h \cos \theta$, ρ 为颗粒流的密度, g 为重力加速度, h 为颗粒流的深度, θ 为坡面倾角; $\dot{\gamma}_{xx}$ 、 $\dot{\gamma}_{yy}$ 分别为 x 和 y 方向的应变速率; $|\dot{\gamma}| = \sqrt{0.5[(\dot{\gamma}_{xx})^2 + (\dot{\gamma}_{yy})^2]}$, $|\dot{\gamma}|$ 中忽略了颗粒流的剪应变。

将以上本构关系代入 Navier-Stokes 方程并在深度方向上进行积分, 舍掉较小的二阶项, 就可以得到相应的控制方程如下:

质量守恒方程为

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{v})}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

x 和 y 方向上的动量守恒方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u}^2)}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{u}\bar{v})}{\partial y} &= gh \sin \zeta - \\ \text{sgn}(\bar{u})\mu_{bx}gh \cos \theta - \\ gh \cos \theta \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h\bar{v})}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{v}^2)}{\partial y} + \frac{\partial(h\bar{u}\bar{v})}{\partial x} &= gh \sin \theta - \\ \text{sgn}(\bar{v})\mu_{by}gh \cos \theta - \\ gh \cos \theta \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

式中: $\bar{u}$ 和 $\bar{v}$ 分别为颗粒流在两个方向上的速度分量; μ_{bx} 和 μ_{by} 分别为颗粒流在 x 和 y 方向上的床面摩擦系数。

3 广义摩擦系数的确定

在求解控制式(4)~(6)中, 涉及的关键参数之一为广义摩擦系数 μ , 在本节将探讨广义摩擦系数的确定方法。

颗粒物质的流动可以分为准静态流动和动态流动, 区分这两类流动形式的标准是颗粒之间的碰撞应力和摩擦应力的相对大小。Iverson 等^[19]引入了 Savage 数来描述碰撞应力和摩擦应力之间的比值, 并认为当 Savage 数小于 0.1 时其流动即为准静态流动。而自然界中大多数的颗粒物质的流动是准静态流^[7], 即我们可以认为在自然碎屑流运动中, 摩擦作用占主要作用。此外, 对于现有的颗粒物质流动模型, 如 Savage^[11]、Iverson^[19]、Frenette^[20]等都认为, 颗粒物质在运动过程中的内部应力满足屈服准

则。而宾汉流理论认为,只有当材料内部的应力达到屈服应力时才会表现出流动性质。

因此,可以通过引入土的三维破坏准则,得到广义摩擦系数 μ 的表达形式。下面就分别引入 Von Mises、Drucker-Prager、Mohr-Coulomb、Matsuoka-Nakai 4 种土的三维破坏准则进行讨论。

3.1 Von Mises 准则

Von Mises 准则是一种以八面体应力判断破坏的理论^[21]。其偏应力不变量的表达式为

$$J_2 = k_m^2 \quad (7)$$

式中: k_m 为强度参数。

将第二偏应力不变量 J_2 的表达式代入式 (7), 并展开可以得广义摩擦系数的表达式为

$$\mu = \sqrt{\frac{2}{P^2} \left[\frac{k_m^2 |\dot{\gamma}|^2}{\dot{\gamma}_{xx}^2 + \dot{\gamma}_{yy}^2} - (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \right]} = \sqrt{\frac{k_m^2 - \tau_b^2}{P^2}} \quad (8)$$

式中: τ_b 为床面摩擦应力。

3.2 Drucker-Prager 准则

相比于 Von Mises 准则, Drucker-Prager 准则能够反映平均主应力对抗剪强度的影响, 该准则用偏应力不变量可以表示为

$$\sqrt{J_2} - \alpha_m I_1 - k_m = 0 \quad (9)$$

式中: α_m 为强度参数。

假设颗粒流底部摩擦为库仑型摩擦, 令床面摩擦系数为 $\mu_b = \tau/P$, 于是可以得到如下关系:

$$\mu^2 \left(\alpha_m^2 - \frac{1}{2} + \frac{2\dot{\gamma}_{xx}\dot{\gamma}_{yy}}{|\dot{\gamma}|^2} \right) + \mu \frac{6\alpha_m^2(\dot{\gamma}_{xx} + \dot{\gamma}_{yy})}{|\dot{\gamma}|} + 9\alpha_m^2 - \mu_b^2 = 0 \quad (10)$$

令

$$A = \frac{\dot{\gamma}_{xx} + \dot{\gamma}_{yy}}{\sqrt{2}|\dot{\gamma}|} \quad (-\sqrt{2} \leq A \leq \sqrt{2}),$$

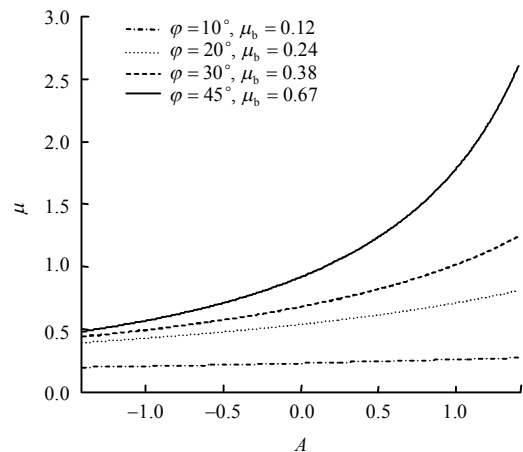
$$C = \frac{2\dot{\gamma}_{xx}\dot{\gamma}_{yy}}{|\dot{\gamma}|^2} = A^2 - 1 \quad (-1 \leq C \leq 1),$$

$B = 1/\alpha_m$, 求解式 (10), 可以得到

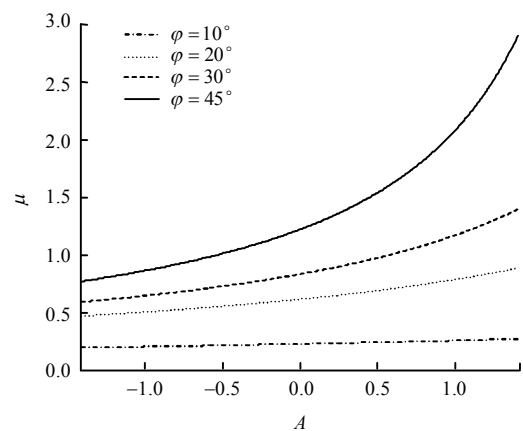
$$\mu = \frac{-6A \pm \sqrt{36A^2 - 2(9 - B^2\mu_b^2)(2A^2 - B^2)}}{2A^2 - B^2} \quad (11)$$

为了进一步研究广义摩擦系数的变化规律, 取两组材料参数进行比较分析。在第 1 组参数里, 令床面摩擦系数为内摩擦角正切的 $2/3$, 即 $\mu_b = 2/3 \tan \varphi$, 则第 1 组参数为: $\varphi = 10^\circ$, $\mu_b = 0.12$; $\varphi = 20^\circ$, $\mu_b = 0.24$; $\varphi = 30^\circ$, $\mu_b = 0.38$; $\varphi = 45^\circ$, $\mu_b = 0.67$ 。在第 2 组参数里, 令床面摩擦系数为一固定值 ($\mu_b = 0.12$), 而内摩擦角分别取 $\varphi = 10^\circ$ 、 20° 、 30° 、 45° 。

图 3 为 A 与广义摩擦系数 μ 之间的关系曲线。从图中可以看出: ① 广义摩擦系数与 A 存在着正相关的关系, 并且在 A 值相同的条件下, 内摩擦角越大, 广义摩擦系数越大; ② 当 $A = -\sqrt{2}$, 即 $\dot{\gamma}_{xx} = \dot{\gamma}_{yy} < 0$ 时, 广义摩擦系数取最小值; 当 $A = \sqrt{2}$, 即 $\dot{\gamma}_{xx} = \dot{\gamma}_{yy} > 0$ 时, 广义摩擦系数取最大值; ③ 通过对比图 3(a) 和图 3(b) 可知, 对于同一种材料 (内摩擦角相等), 床面摩擦系数越大, 广义摩擦系数就越小。



(a) $\mu_b = 2/3 \tan \varphi$



(b) $\mu_b = 0.12$

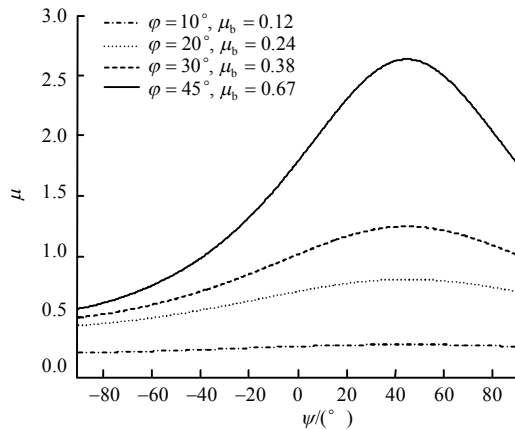
图 3 广义摩擦系数与 A 的关系曲线(Drucker-Prager 准则)
Fig.3 Relationships between the generalized frictional coefficient and A (Drucker-Prager criterion)

为了更好地表示变量的物理意义, 对 A 做如下变换:

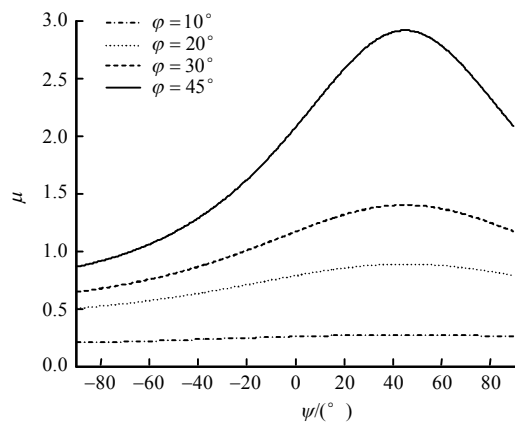
$$A = \frac{1 + \frac{\dot{\gamma}_{yy}}{\dot{\gamma}_{xx}}}{\sqrt{0.5 \left[1 + \left(\frac{\dot{\gamma}_{yy}}{\dot{\gamma}_{xx}} \right)^2 \right]}} = \frac{1 + \tan \psi}{\sqrt{0.5 (1 + \tan^2 \psi)}} \quad (12)$$

定义 $\tan \psi = \frac{\dot{\gamma}_{yy}}{\dot{\gamma}_{xx}}$, 于是可以定义“角 ψ ”与广

义摩擦系数之间的关系, 见图 4。从图中可以看出, 当 $\psi = 45^\circ$, 即 $\dot{\gamma}_{xx} = \dot{\gamma}_{yy} > 0$ 时, 广义摩擦系数取最大值。当 $\psi < 45^\circ$ 时, 广义摩擦系数与 ψ 为正相关关系; 当 $\psi > 45^\circ$ 时, 广义摩擦系数与 ψ 为负相关关系。并且在 ψ 值相同的条件下, 内摩擦角越大, 广义摩擦系数越大。当 $\psi = -90^\circ$, 即 $\dot{\gamma}_{xx} = \dot{\gamma}_{yy} < 0$ 时, 广义摩擦系数取最小值。



(a) $\mu_b = 2/3 \tan \varphi$



(b) $\mu_b = 0.12$

图 4 广义摩擦系数与 ψ 的关系曲线(Drucker-Prager 准则)
Fig.4 Relationships between the generalized frictional coefficient and ψ (Drucker-Prager criterion)

3.3 Mohr-Coulomb 准则

在三维 S-H 颗粒流模型中, 土压力系数是通过 Mohr-Coulomb 准则进行二维应力分析得到的。在这里采用 Mohr-Coulomb 准则进行三维应力分析。Mohr-Coulomb 的表达式为

$$\frac{I_1}{3} \sin \varphi - \sqrt{J_2} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta_L \sin \varphi + \cos \theta_L \right] + c \cos \varphi = 0 \quad (13)$$

式中: c 为黏聚力; φ 为内摩擦角; θ_L 为应力洛德角。将主应力不变量和偏应力不变量表达式代入式 (13), 又由 $c = 0$, 可得

$$\mu^2 \left(1 - \frac{B^2}{2} + \frac{2\dot{\gamma}_{xx}\dot{\gamma}_{yy}}{|\dot{\gamma}|^2} \right) + \mu \frac{6(\dot{\gamma}_{xx} + \dot{\gamma}_{yy})}{|\dot{\gamma}|} + 9 - B'^2 \mu_b^2 = 0 \quad (14)$$

式中: $B' = \sqrt{3} \sin \theta_L + \frac{3 \cos \theta_L}{\sin \varphi}$ 。

进而, 令 $A = \frac{\dot{\gamma}_{xx} + \dot{\gamma}_{yy}}{\sqrt{2}|\dot{\gamma}|}$ ($-\sqrt{2} \leq A \leq \sqrt{2}$),

$C = \frac{2\dot{\gamma}_{xx}\dot{\gamma}_{yy}}{|\dot{\gamma}|^2}$ ($-1 \leq C \leq 1$), 可以得到一元二次式 (14) 的解为

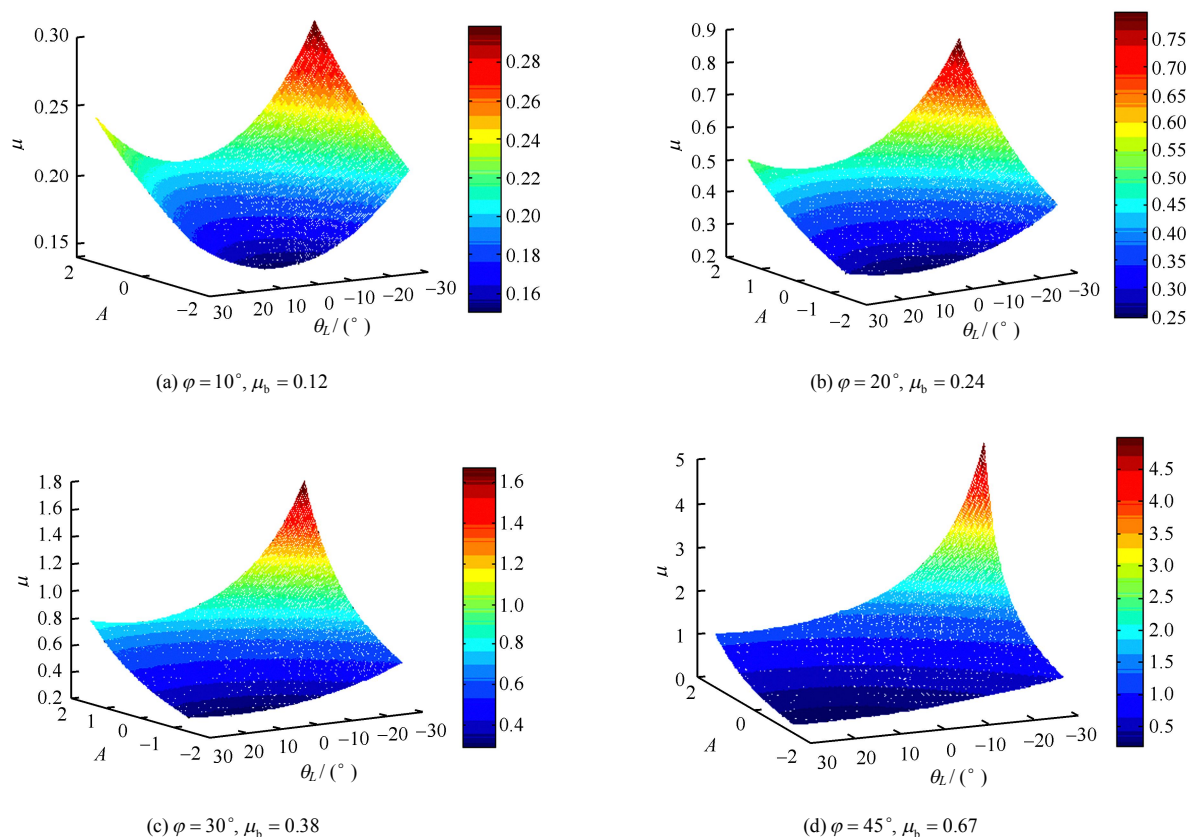
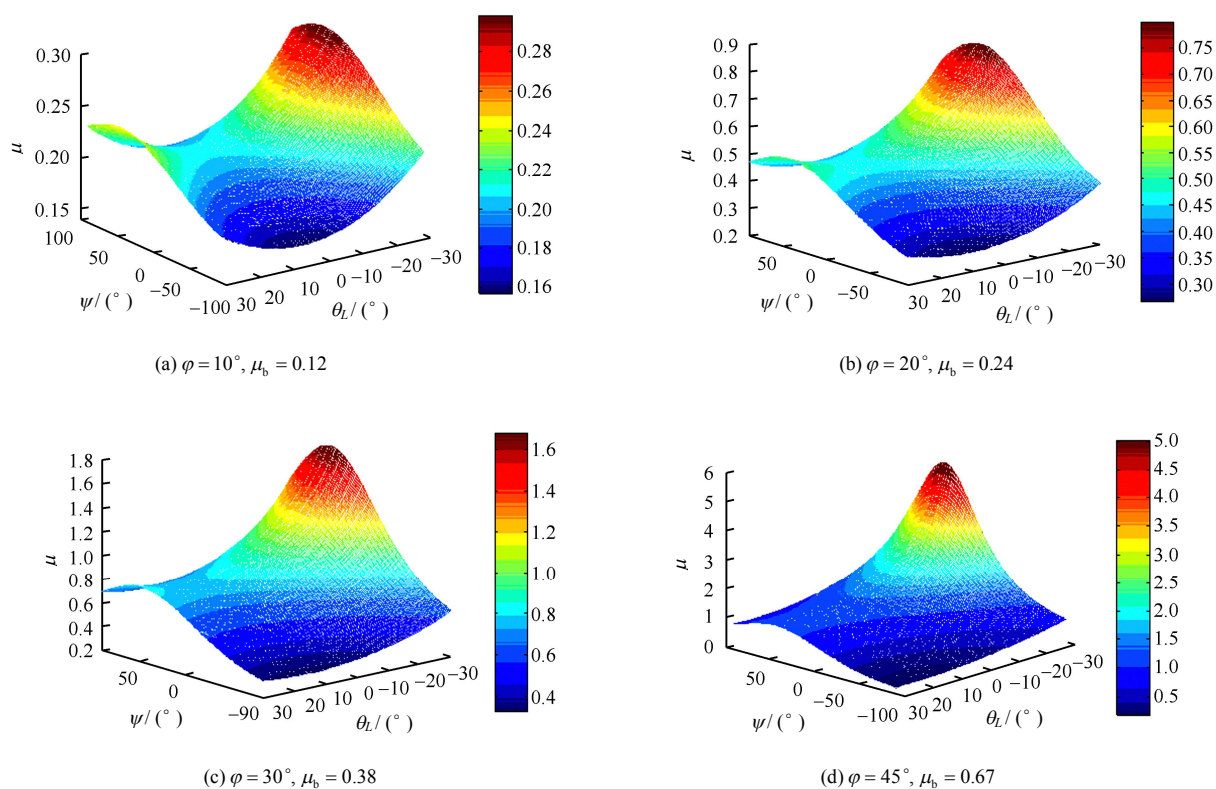
$$\mu = \frac{-6A \pm \sqrt{36A^2 - 2(9 - B'^2 \mu_b^2)(2A^2 - B'^2)}}{2A^2 - B'^2} \quad (15)$$

同 3.2 节分析, 为了研究广义摩擦系数 μ 的性质与规律, 令 $\mu_b = \frac{2}{3} \tan \varphi$ 即: $\varphi = 10^\circ$, $\mu_b = 0.12$; $\varphi = 20^\circ$, $\mu_b = 0.24$; $\varphi = 30^\circ$, $\mu_b = 0.38$; $\varphi = 45^\circ$, $\mu_b = 0.67$ 。于是可以得到 $A = \frac{\dot{\gamma}_{xx} + \dot{\gamma}_{yy}}{\sqrt{2}|\dot{\gamma}|}$ 、应力洛德角

与广义摩擦系数 μ 之间关系的函数曲面 (见图 5)。

从图 5 可以分析得到以下结论: ① 广义摩擦系数 μ 与材料内摩擦角存在正相关关系; ② 对于应力洛德角确定的情况下, 广义摩擦系数随着 A 的增大而增大; ③ 当 A 取最大值 $\sqrt{2}$, 且应力洛德角取最小值 -30° 时, 广义摩擦系数取值最大值; ④ 对于内摩擦角分别为 $\varphi = 10^\circ$ 、 20° 、 30° 、 45° 的颗粒材料, 为了使广义摩擦系数取最小值, A 应该取最小值 $-\sqrt{2}$, 且相应的应力洛德角应分别取 $\theta_L = 6^\circ$ 、 12° 、 17° 、 30° 。即使广义摩擦系数取最小值的应力洛德角, 它随着颗粒材料内摩擦角的增大而增大。

同 3.2 节的分析, 同样可以得到 ψ 、应力洛德角与广义摩擦系数之间的关系 (见图 6)。从图中可以看出, 对于应力洛德角确定的情况下, 当

图5 广义摩擦系数与 A 和洛德角的关系曲面(Mohr-Coulomb 准则)Fig.5 Relationships among the generalized friction coefficient, A and Lode angle(Mohr-Coulomb criterion)图6 广义摩擦系数与 ψ 和洛德角的关系曲面(Mohr-Coulomb 准则)Fig.6 Relationships among the generalized friction coefficient, ψ and Lode angle (Mohr-Coulomb criterion)

$\psi = 45^\circ$, 即 $\dot{\gamma}_{xx} = \dot{\gamma}_{yy} > 0$ 时, 广义摩擦系数取最大值。当 $\psi < 45^\circ$ 时, 广义摩擦系数跟 ψ 存在着正相关关系; 当 $\psi > 45^\circ$ 时, 广义摩擦系数与 ψ 存在着负相关关系。

3.4 Matsuoka-Nakai 准则

Matsuoka-Nakai^[22]破坏准则是基于砂土试验建立起来的破坏准则。由于砂土更接近于颗粒物质的特征, 故用此准则来描述颗粒体破坏会更加真实。其表达式用主应力不变量可以表示为

$$\frac{I_1 I_2}{I_3} = k \quad (16)$$

式中: k 为表征土体强度的物理量。

参照以上各节的分析, 假设颗粒流底部摩擦为库仑型摩擦, 则床面摩擦系数 $\mu_b = \tau / P$ 。因此, 将 3 个不变量的表达式代入式 (16), 可以得到如下关系:

$$\begin{aligned} & \mu^3 [\dot{\gamma}_{xx}^2 \dot{\gamma}_{yy} + \dot{\gamma}_{yy}^2 \dot{\gamma}_{xx}] + \\ & \mu^2 [2\dot{\gamma}_{xx}^2 + 2\dot{\gamma}_{yy}^2 + (7-k)\dot{\gamma}_{xx}\dot{\gamma}_{yy}] |\dot{\gamma}| + \\ & \mu [(9-k-\mu_b^2 + k\mu_b^2)\dot{\gamma}_{xx} + (9-k-\mu_b^2 + \\ & k\mu_b^2)\dot{\gamma}_{yy}] |\dot{\gamma}|^2 + (9-k-3\mu_b^2 + k\mu_b^2) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

由于式 (17) 为三次方程, 难以得到简洁形式的方程的解。在数值计算中, 需要添加专门的模块对广义摩擦系数的值进行求解。

3.5 土的破坏准则在颗粒流模型中应用的优缺点

在土的 4 种破坏准则中, Von Mises 准则没有反映平均主应力对土抗剪强度的影响, 在土力学问题中通常用于描述饱和土的不排水强度。因此, 对于含水率较高的土体的崩塌与滑动, 可以采用 Von Mises 准则。另外, Von Mises 准则在主应力空间中是一个圆柱面, 不存在突出的角点, 故在用 Von Mises 准则推导广义摩擦系数时, 其最终表达式不存在速度的梯度项, 这有利于数值计算的精度和稳定性。

Drucker-Prager 准则反映了平均主应力对土体抗剪强度的影响, 其主应力空间中是一个光滑的正圆锥体面, 在用 Drucker-Prager 准则作为屈服准则推导广义摩擦系数时, 表达式的形式较为简单, 数值计算的稳定性和精度也较高。

Mohr-Coulomb 准则描述了破坏面上剪应力与正应力之间的关系, 能很好地体现土体作为散体材

料的基本力学特征。但 Mohr-Coulomb 准则不能反映中主应力对屈服和破坏的影响。另外, Mohr-Coulomb 准则的屈服面以及其在 π 平面上的轨迹有导数不连续的角点, 这会给数值计算带来一定的问题。

Matsuoka-Nakai 准则认为, 3 个主应力不变量对土的抗剪强度都有影响, 因此, 能较好地描述砂土的破坏特性。但在用 Matsuoka-Nakai 准则作为破坏准则求解广义摩擦系数时, 最后需要解一个含有速度三阶梯度项的一元三次方程, 需要添加专门的模块对方程进行求解。而在求解方程的过程中可能会出现一元三次方程无解的情况, 会给数值计算带来一定的麻烦。

4 模型验证

采用文献[14]中的试验对模型进行验证, 其中的广义摩擦系数通过 Drucker-Prager 准则来确定。由于试验材料是 $\varphi = 40^\circ$ 的无黏性砂土, 为了得到 Drucker-Prager 准则的强度参数 α_m , 采用将 Mohr-Coulomb 准则与 Drucker-Prager 准则在主应力空间进行拟合的方法。当采用外接拟合的方法, 可以得到其表达式为

$$\alpha_m = \frac{2\sin\varphi}{\sqrt{3}(3-\sin\varphi)} = 0.315 \quad (18)$$

对于模型中的床面摩擦系数 μ_b , 引入文献[23]中的相关公式:

$$\mu_b = \mu_s + \frac{\mu_s - \mu_2}{\frac{\beta dh \sqrt{gh}}{uL_0} + 1} \quad (19)$$

式中: u 为颗粒流速度; L_0 、 β 、 μ_s 、 u_2 为试验参数, 根据文献[17], 物理参数的取值分别为 $L_0/d = 2.03$, $\beta = 0.65$, $\mu_s = 0.49$ 、 $u_2 = 0.57$ 。

图 7 给出了本文建议模型的模拟结果, 此外为了进行对比, 该图中也给出了用 S-H 模型的模拟和试验结果。其中, X 轴代表颗粒体沿坡面的滑动距离, Y 轴代表颗粒体的横向扩展范围。通过对比本文提出模型的模拟和试验结果可知, 模拟和试验结果在 1.00 s 之前拟合得较好, 但随后模拟的流动慢于试验结果。颗粒流在试验中于 1.79 s 后静止, 但数值模拟的流动直到 1.85 s 以后才会静止。从总体上讲, 与 S-H 模型模拟的结果相比, 本文提出的模型能更好地反映试验现象。

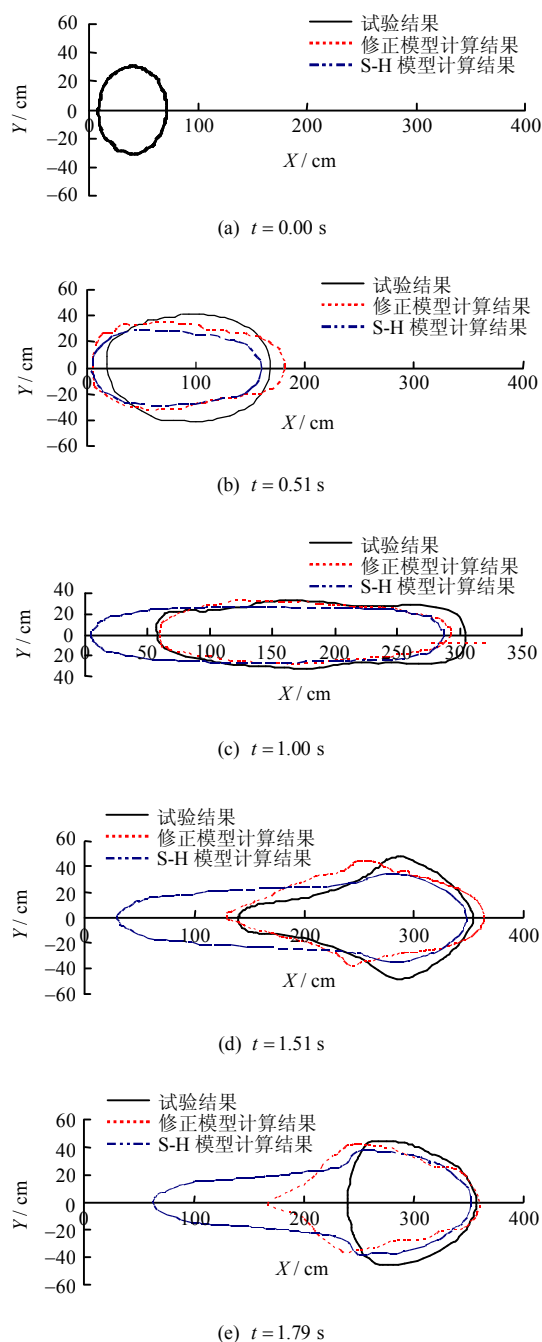


图 7 本文建议模型、S-H 模型的模拟结果与试验结果的对比如

Fig.7 Comparison between numerical simulations and experimental results

5 结论与讨论

为了解除三维 S-H 模型中关于横向应力的假设, 本文提出了一种基于土的三维破坏准则的颗粒流模型。模型的主要优势是通过引入颗粒流的本构关系, 能较好地体现颗粒流体在运动中的内在机制。另外, 本文引入了 Von Mises、Drucker-Prager、Mohr-Coulomb、Matsuoka-Nakai 4 种土的破坏准则, 得到了广义摩擦系数的 4 种表达形式。这样, 在 Jop 等^[18]本构模型中难以测定的物理参数, 在本文所提的模

型中就转化成了简单易得的材料强度参数。从而可以较容易地实现对具有复杂构成的颗粒体运动的数值模拟。算例计算表明, 本文所建议的模型有较好地预测能力。

参考文献

- [1] CLAESSENS L, HEUVELINK G B M, SCHOORL J M, et al. DEM resolution effects on shallow landslide hazard and soil redistribution modelling[J]. **Earth Surface Processes and Landforms**, 2005, 30(4): 461–477.
- [2] BHARADWAJ R, WASSGREN C, ZENIT R. The unsteady drag force on a cylinder immersed in a dilute granular flow[J]. **Physics of Fluids**, 2006, 18(4): 043301.
- [3] HANES D M, WALTON O R. Simulations and physical measurements of glass spheres flowing down a bumpy incline[J]. **Powder Technology**, 2000, 109(1): 133–144.
- [4] TEUFELSBAUER H, WANG Y, CHIOU M C, et al. Flow-obstacle interaction in rapid granular avalanches: DEM simulation and comparison with experiment[J]. **Granular Matter**, 2009, 11(4): 209–220.
- [5] LANG T E, BROWN R L. Snow-avalanche impact on structures[J]. **Journal of Glaciology**, 1980, 25: 445–455.
- [6] JEYAPALAN K. Analyses of flow failures of mine tailings impoundments[D]. Berkeley: University of California, 1980.
- [7] TAKAHASHI T. Debris flow[M]. Rotterdam: Balkema, 1991.
- [8] O'BRIEN J S, JULIEN P Y, FULLERTON W T. Two-dimensional water flood and mudflow simulation[J]. **Journal of Hydraulic Engineering**, 1993, 119(2): 244–261.
- [9] VOIGHT B, SOUSA J. Lessons from Ontake-san: A comparative analysis of debris avalanche dynamics[J]. **Engineering Geology**, 1994, 38(3): 261–297.
- [10] SHIEH C L, JAN C D, TSAI Y F. A numerical simulation of debris flow and its application[J]. **Natural Hazards**, 1996, 13(1): 39–54.
- [11] SAVAGE S B, HUTTER K. The motion of a finite mass of granular material down a rough incline[J]. **Journal of Fluid Mechanics**, 1989, 199: 177–215.
- [12] DA CRUZ F, EMAM S, PROCHNOW M, et al. Rheophysics of dense granular materials: Discrete simulation of plane shear flows[J]. **Physical Review E**, 2005, 72(2): 021309.
- [13] HUTTER K, SIEGEL M, SAVAGE S B, et al. Two-dimensional spreading of a granular avalanche down an inclined plane part I. Theory[J]. **Acta Mechanica**, 1993, 100(1–2): 37–68.

- [14] GRAY J, WIELAND M, HUTTER K. Gravity-driven free surface flow of granular avalanches over complex basal topography[J]. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, 1999, 455(1985): 1841—1874.
- [15] BOUCHUT F, MANGENEY-CASTELNAU A, PERTHAME B, et al. A new model of Saint Venant and Savage-Hutter type for gravity driven shallow water flows[J]. **Comptes Rendus Mathematique**, 2003, 336(6): 531—536.
- [16] FERNÁNDEZ-NIETO E D, BOUCHUT F, BRESCH D, et al. A new Savage-Hutter type model for submarine avalanches and generated tsunami[J]. **Journal of Computational Physics**, 2008, 227(16): 7720—7754.
- [17] PUDASAINI S P, HUTTER K. Rapid shear flows of dry granular masses down curved and twisted channels[J]. **Journal of Fluid Mechanics**, 2003, 495: 193—208.
- [18] JOP P, FORTERRE Y, POULIQUEN O. A constitutive law for dense granular flows[J]. **Nature**, 2006, 441(7094): 727—730.
- [19] IVERSON R M, REID M E, LAHUSEN R G. Debris-flow mobilization from landslides 1[J]. **Annual Review of Earth and Planetary Sciences**, 1997, 25(1): 85—138.
- [20] FRENETTE R, ZIMMERMANN T, EYHERAMENDY D. Unified modeling of fluid or granular flows on dam-break case[J]. **Journal of Hydraulic Engineering**, 2002, 128(3): 299—305.
- [21] 李广信. 高等土力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- LI Guang-xin. Advanced soil mechanics[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.
- [22] MATSUOKA H. On the significance of the spatial mobilized plane[J]. **Soils and Foundations**, 1976, 16(1): 91—100.
- [23] JOP P, FORTERRE Y, POULIQUEN O. Crucial role of sidewalls in granular surface flows: Consequences for the rheology[J]. **Journal of Fluid Mechanics**, 2005, 541(6): 167—192.

上接第 1780 页

- [23] SPENCER W A. Stochastic and finite element modeling of clay slope stability in 3D[D]. Manchester: The University of Manchester, 2007.
- [24] 高大钊. 土力学可靠性原理[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1989.
- GAO Da-zhao. Principles of soil mechanics reliability[M]. Beijing: China Building Industry Press, 1989.
- [25] 黄广龙, 龚晓南, 肖溟. 土性参数的随机场模型及桩体沉降变异特性分析[J]. 岩土力学, 2000, 21(4): 311—315.
- HUANG Guang-long, GONG Xiao-nan, XIAO Ming. Random field model of soil property and analysis of variability of pile-settlement[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2000, 21(4): 311—315.
- [26] 刘润, 闫澍旺, 周宏杰. 空间随机场模型的建立与桩基竖向承载力的可靠度分析[J]. 岩土力学, 2004, 25(10): 1603—1608.
- LIU run, YAN Shu-wang, ZHOU Hong-jie. Random field modeling and reliability analysis of vertical bearing capacity of pile foundation of ocean structures[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2004, 25 (10): 1603—1608.
- [27] 刘润, 闫澍旺. 渤海湾地基土随机场特性及可靠度分析[J]. 岩土工程学报, 2004, 26(4): 464—467.
- LIU Run, YAN Shu-wang. Random field model and reliability analysis of foundation soil in Bohai Gulf[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2004, 26(4): 464—467.
- [28] 韩宪军. 弹模随机场对地下洞室可靠度计算结果的影响[J]. 西安科技大学学报, 2007, 27(2): 214—217.
- HAN Xian-jun. Effect of elastic modules random field of surrounding rocks on reliability calculation of underground chamber[J]. **Journal of Xi'an University of Science and Technology**, 2007, 27(2): 214—217.
- [29] 吴长富, 朱向荣, 刘雪梅. 杭州地区典型土层抗剪强度指标的变异性研究[J]. 岩土工程学报, 2005, 27(1): 94—99.
- WU Chang-fu, ZHU Xiang-rong, LIU Xue-mei. Typical stratum in Hangzhou area Studies on variability of shear strength indexes for several typical stratum in Hangzhou area[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2005, 27(1): 94—99.
- [30] 何晓群. 多元统计分析[M]. 北京: 中国人民大学出版社, 2004.
- HE Xiao-qun. Multivariate statistical analysis[M]. Beijing: China Renmin University Press, 2004.